

1. В городе N с любой станции метро можно переехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт так, что для оставшихся станций можно будет проехать с любой на любую другую.
2. В стране N некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2025 авиалиний, из города Дальнего – 25, а из остальных городов – по 100 авиалиний. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего.
3. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами. Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.
4. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
5. В графе n вершин и наименьшая из степеней вершин равна m . Найдите наименьшее число d такое, что при $m \geq d$ граф обязательно связный, а при любом $m < d$ граф может оказаться не связным.
6. В графе n вершин и m рёбер. Найдите наименьшее число d такое, что при $m \geq d$ граф обязательно связный, а при любом $m < d$ граф может оказаться не связным.
7. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими. Докажите, что

если отменить любые $n - 1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах.

8. В стране каждые два города соединены ровно одним сообщением: авиалинией или железной дорогой. Докажите, что можно выбрать один путь сообщения так, что из любого города можно добраться до любого другого, пользуясь только этим сообщением и сделав не более двух пересадок.

9. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Можно выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос „есть ли дорога между ними?“. Нужно узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.

10. Про некоторую компанию, состоящую из n человек известно, что среди любых k из них ($1 < k < n$) найдётся знакомый с $k - 1$ из них. Найдите все пары (k, n) , для которых из этого следует, что обязательно найдётся человек, знакомый со всеми остальными из этой компании.

11. В некоторой группе из 12 человек среди каждых девяти найдутся пять попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся шесть попарно знакомых.