

1. В городе  $N$  с любой станции метро можно переехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт так, что для оставшихся станций можно будет проехать с любой на любую другую.
2. В стране  $N$  некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2025 авиалиний, из города Дальнего – 25, а из остальных городов – по 100 авиалиний. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего.
3. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами. Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.
4. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
5. В графе  $n$  вершин и наименьшая из степеней вершин равна  $m$ . Найдите наименьшее число  $d$  такое, что при  $m \geq d$  граф обязательно связный, а при любом  $m < d$  граф может оказаться не связным.
6. В графе  $n$  вершин и  $m$  рёбер. Найдите наименьшее число  $d$  такое, что при  $m \geq d$  граф обязательно связный, а при любом  $m < d$  граф может оказаться не связным.
7. Между некоторыми из  $2n$  городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с  $n$  другими. Докажите, что

если отменить любые  $n - 1$  рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах.

**8.** В стране каждые два города соединены ровно одним сообщением: авиалинией или железной дорогой. Докажите, что можно выбрать один путь сообщения так, что из любого города можно добраться до любого другого, пользуясь только эти сообщением и сделав не более двух пересадок.

**9.** В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Можно выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос „есть ли дорога между ними?”. Нужно узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.

**10.** Про некоторую компанию, состоящую из  $n$  человек известно, что среди любых  $k$  из них ( $1 < k < n$ ) найдётся знакомый с стальными  $k - 1$  из них. Найдите все пары  $(k, n)$ , для которых из этого следует, что обязательно найдётся человек, знакомый со всеми остальными из этой компании.

**11.** В некоторой группе из 12 человек среди каждого девятери найдутся пять попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся шесть попарно знакомых.